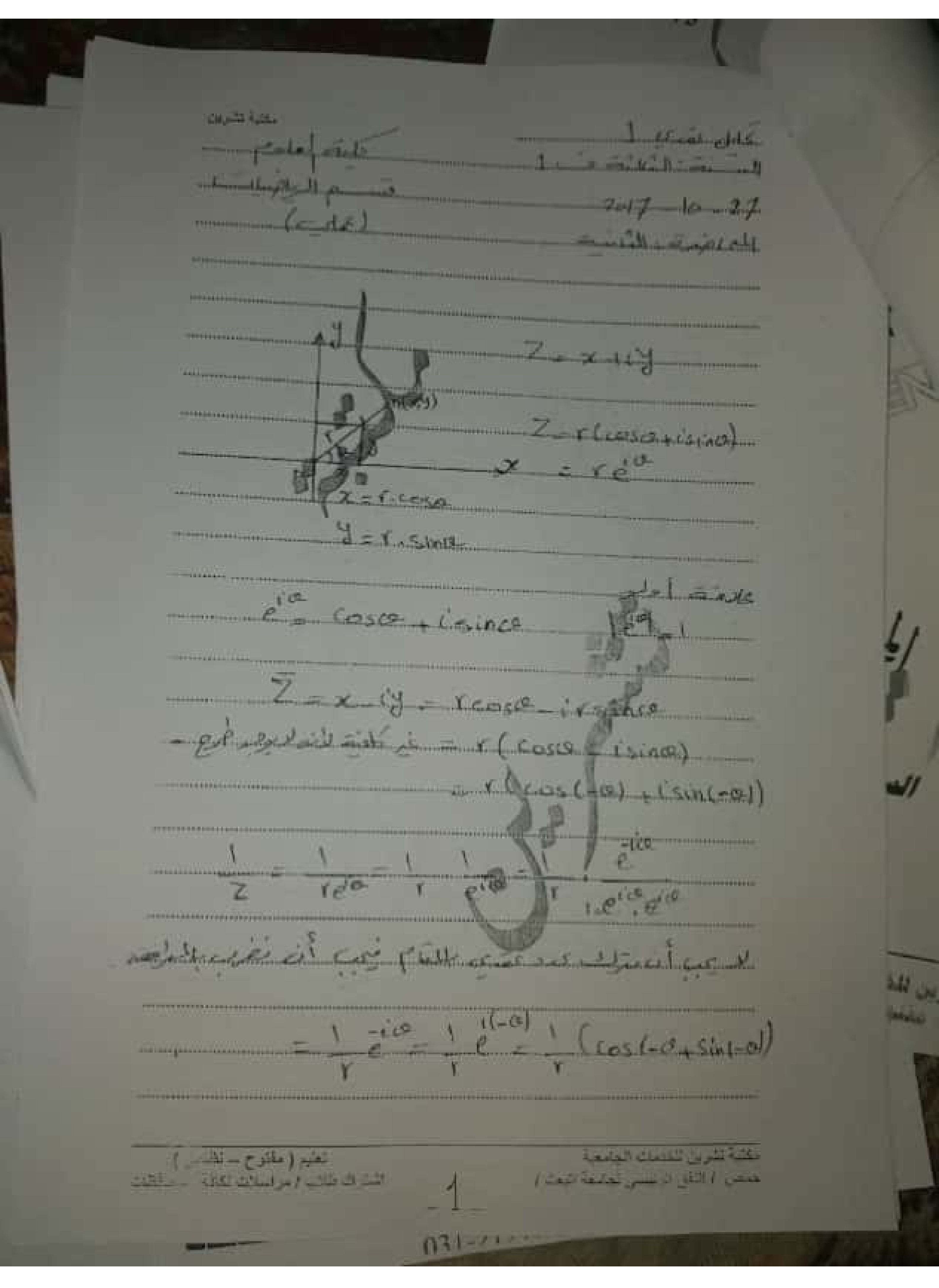


كلية العلوم — تحليل عقدي 1
قسم الرياضيات — السنة الثالثة ف 1
(د.ح) — 2017 - 10 - 27
المحاضرة الثانية

$z = x + iy$

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$z = re^{i\theta}$

$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

علاقة أولر

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \qquad |e^{i\theta}| = 1$

$\bar{z} = x - iy = r\cos\theta - ir\sin\theta$

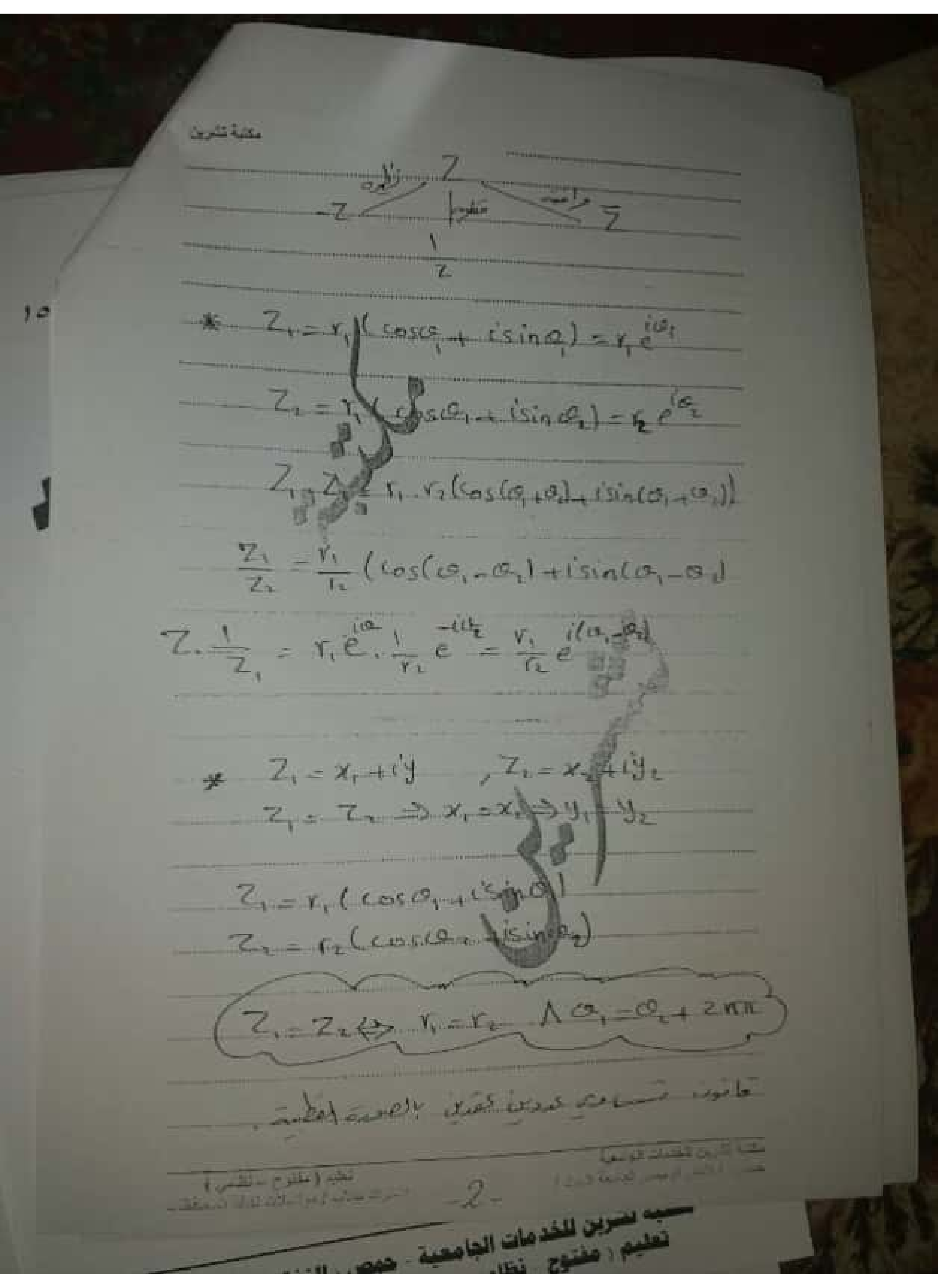
$= r(\cos\theta - i\sin\theta)$ غير كافية لأنه لا يوجد شرط

$= r(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$

$\frac{1}{z} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}\,\frac{1}{e^{i\theta}} = \frac{1}{r}\,\frac{e^{-i\theta}}{1\cdot e^{i\theta}\cdot e^{-i\theta}}$

لا يجب أن تترك كسر في المقام يجب أن نضرب بالمرافق

$= \frac{1}{r}e^{-i\theta} = \frac{1}{r}e^{i(-\theta)} = \frac{1}{r}(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$



* $Z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) = r_1 e^{i\theta_1}$

$Z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = r_2 e^{i\theta_2}$

$Z_1 \cdot Z_2 = r_1 \cdot r_2 (\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2))$

$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2))$

$Z_1 \cdot \frac{1}{Z_2} = r_1 e^{i\theta_1} \cdot \frac{1}{r_2} e^{-i\theta_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}$

* $Z_1 = x_1 + iy_1 \quad , Z_2 = x_2 + iy_2$

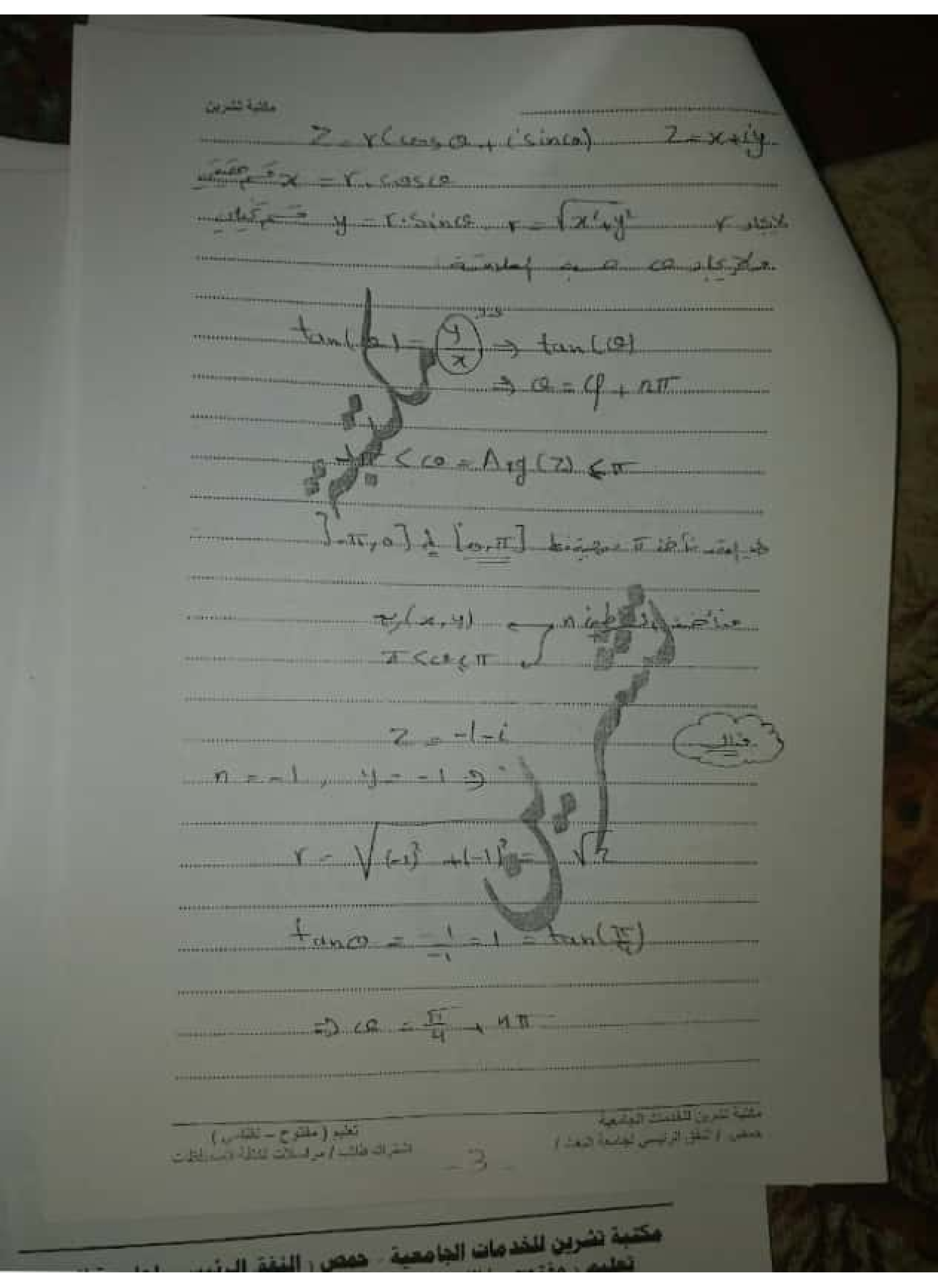
$Z_1 = Z_2 \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow y_1 = y_2$

$Z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$

$Z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

$Z_1 = Z_2 \Leftrightarrow r_1 = r_2 \wedge \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi$

قانون تساوي عددين عقديين بالصيغة المثلثية.



$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ $\quad z = x + iy$

قسم حقيقي $x = r.\cos\theta$

قسم تخيلي $y = r.\sin\theta$ $\quad r = \sqrt{x^2+y^2}$ لايجاد r

$\tan(\theta) = \frac{y}{x} \Rightarrow \tan(\theta)$

$\Rightarrow \theta = \varphi + n\pi$

$-\pi < \theta = Arg(z) \le \pi$

$]-\pi, 0]$ أو $[0, \pi]$

$\theta = \pi/2(x, y)$

$\pi < \theta \le \pi$

مثال:

$z = -1 - i$

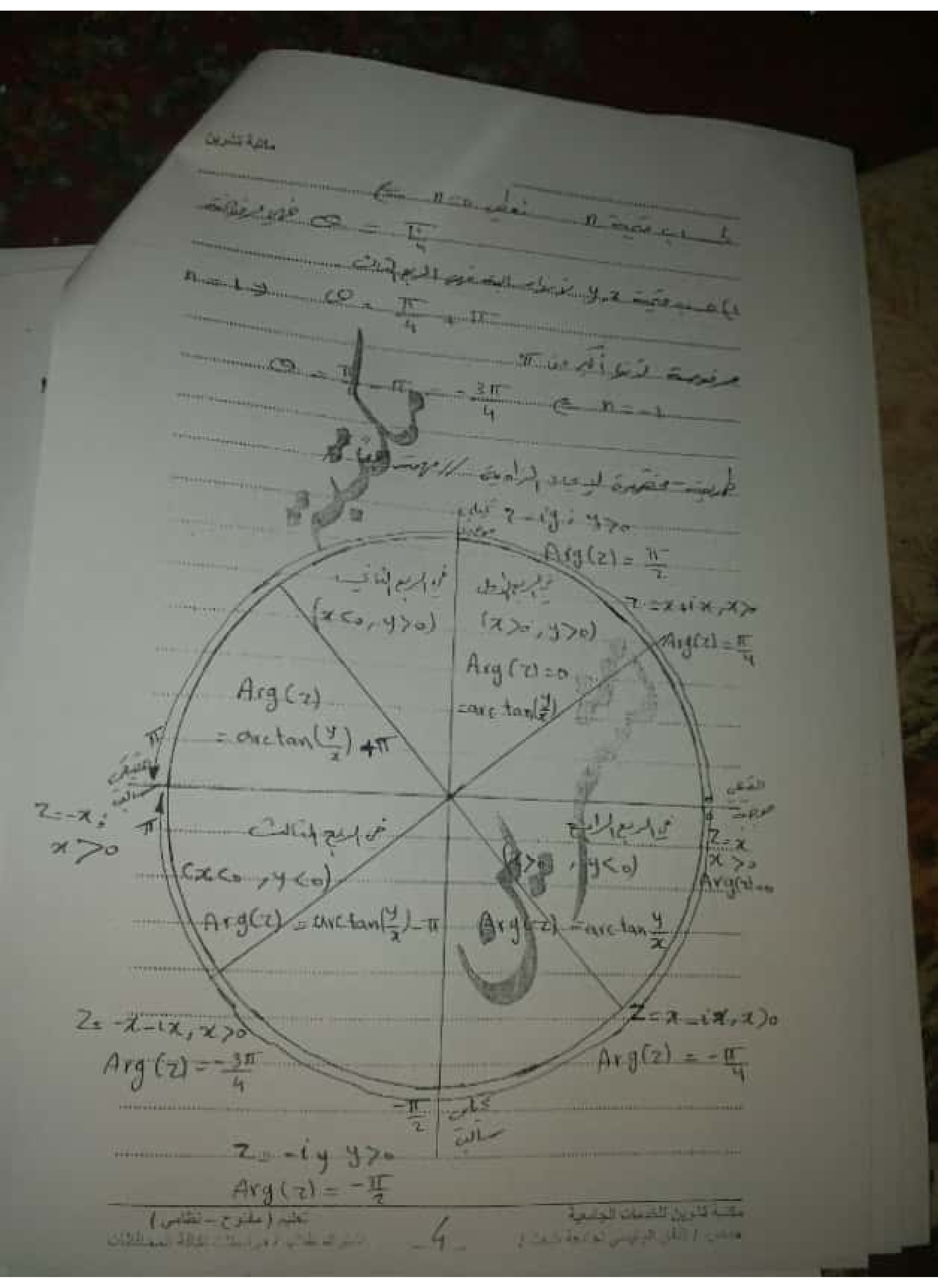
$x = -1, \; y = -1 \Rightarrow$

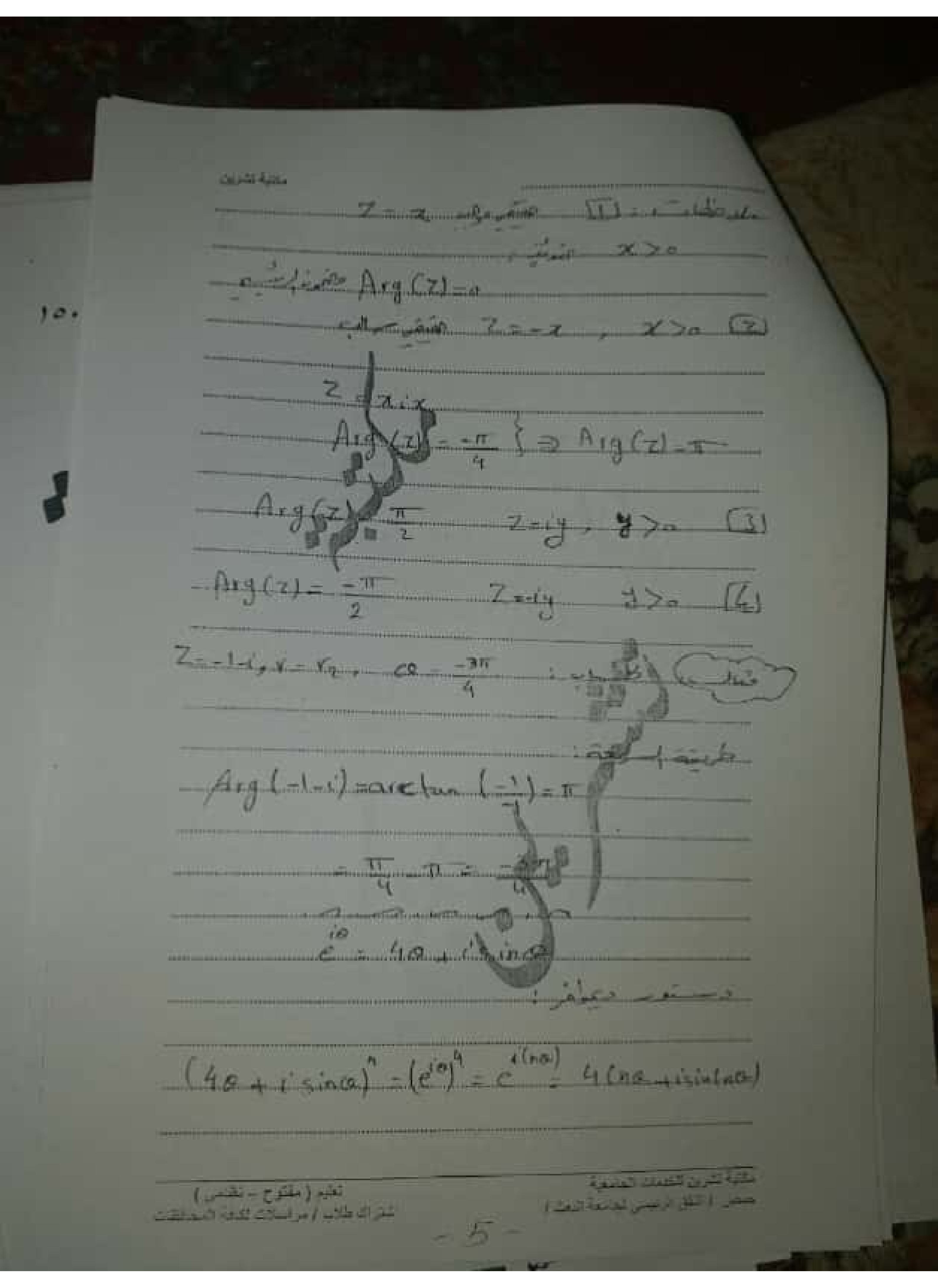
$r = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$\tan\theta = \frac{-1}{-1} = 1 = \tan(\frac{\pi}{4})$

$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} + n\pi$

Scanned by CamScanner


z = iy ; y>0
Arg(z) = π/2
في الربع الثاني
(x<0 , y>0)
في الربع الأول
(x>0 , y>0)
z = x + ix , x>0
Arg(z) = π/4
Arg(z) = 0
= arctan(y/x)
Arg(z)
= arctan(y/x) + π
π
z = -x ; x>0
π
في الربع الثالث
(x<0 , y<0)
Arg(z) = arctan(y/x) − π
في الربع الرابع
(x>0 , y<0)
Arg(z) = arctan y/x
z = x
x > 0
Arg(z) = 0
z = -x - ix , x>0
Arg(z) = −3π/4
z = x − ix , x>0
Arg(z) = −π/4
−π/2
z = −iy y>0
Arg(z) = −π/2
4



ملاحظات : [1] $Z = x$ عدد حقيقي موجب $x > 0$

$Arg(Z) = 0$

[2] $x > 0$, $Z = -x$ عدد حقيقي سالب

$Z = x\,i\,x$

$Arg(z) = \frac{-\pi}{4}$ } $\Rightarrow Arg(z) = \pi$

[3] $y > 0$, $Z = iy$ $\quad Arg(z) = \frac{\pi}{2}$

[4] $y > 0$ $\quad Z = -iy$ $\quad Arg(z) = \frac{-\pi}{2}$

مثال : $Z = -1-i$, $r = \sqrt{2}$, $\theta = \frac{-3\pi}{4}$

طريقة أخرى :

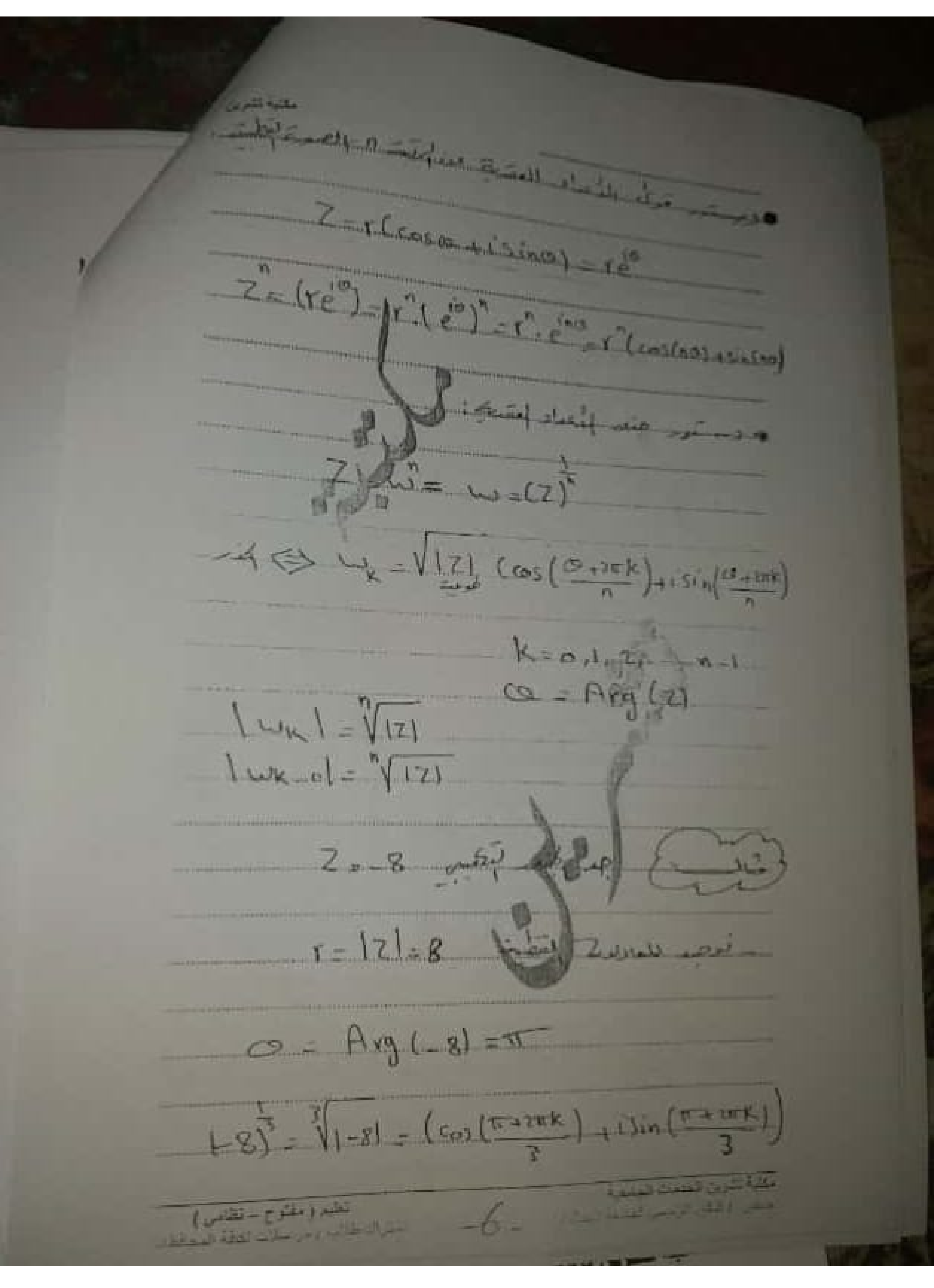
$Arg(-1-i) = \arctan\left(\frac{-1}{-1}\right) = \pi$

$= \frac{\pi}{4} - \pi = \frac{-3\pi}{4}$

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

نستخدم ديموافر :

$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (e^{i\theta})^n = e^{i(n\theta)} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$



• دستور مرفوع الأعداد العقدية المرفوعة n بالصيغة الأسية

$$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

$$Z^n = (re^{i\theta})^n = r^n \cdot (e^{i\theta})^n = r^n \cdot e^{in\theta} = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$$

• دستور جذر الأعداد العقدية

$$Z = w^n \quad w = (Z)^{\frac{1}{n}}$$

$$\Leftrightarrow w_k = \sqrt[n]{|Z|}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right)\right)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

$$\theta = Arg(Z)$$

$$|w_k| = \sqrt[n]{|Z|}$$

$$|w_{k-0}| = \sqrt[n]{|Z|}$$

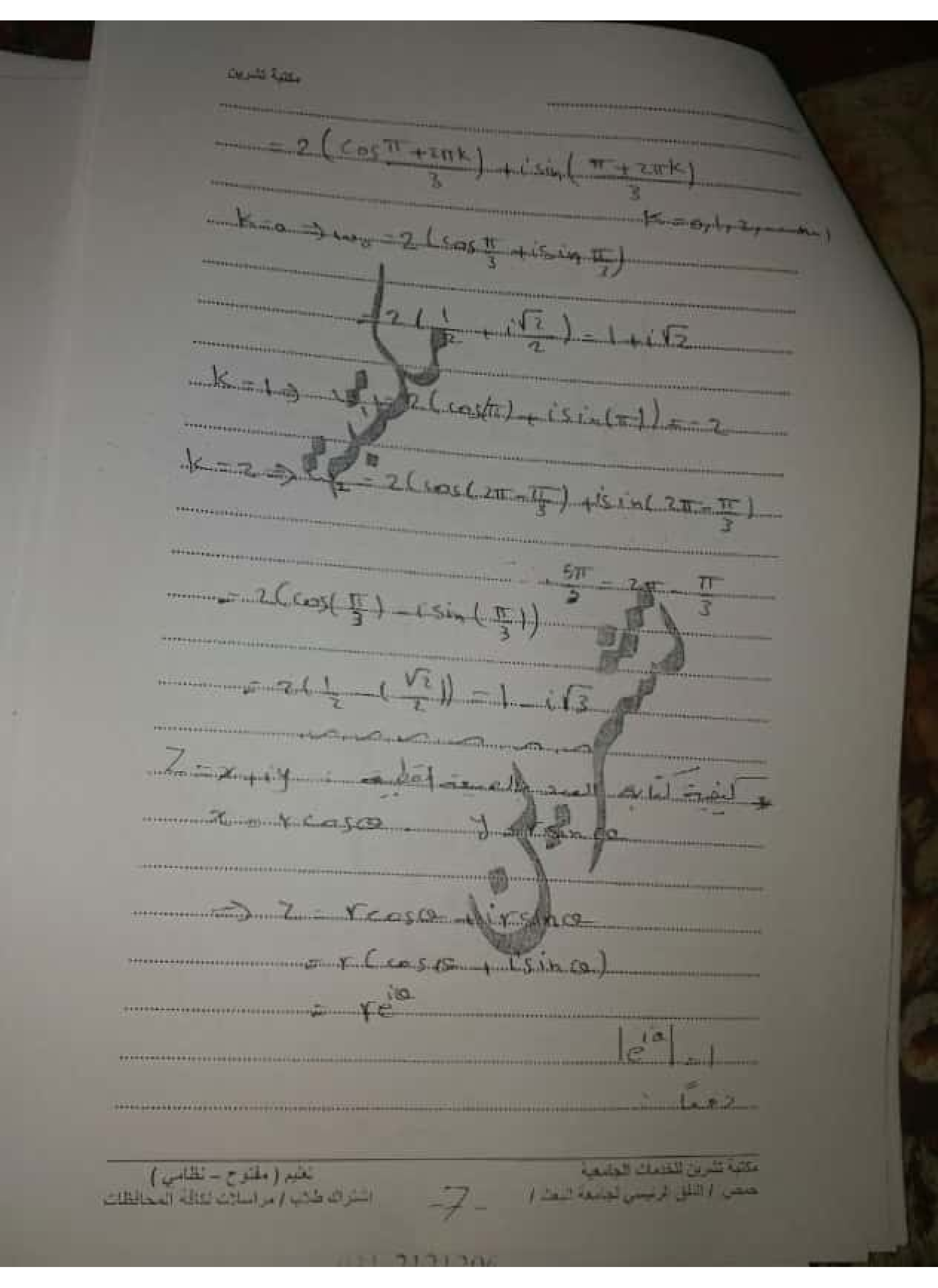
مثال: أوجد الجذر التكعيبي $Z = -8$

نعوض بالعلاقة 2

$$r = |Z| = 8$$

$$\theta = Arg(-8) = \pi$$

$$(-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{|-8|}\left(\cos\left(\frac{\pi + 2\pi k}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi + 2\pi k}{3}\right)\right)$$



$= 2\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{3} + i\sin\left(\frac{\pi+2\pi k}{3}\right)\right)$ $\quad K = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

$k=0 \Rightarrow w_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$= 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{2}$

$k=1 \Rightarrow w_1 = 2(\cos(\pi) + i\sin(\pi)) = -2$

$k=2 \Rightarrow w_2 = 2\left(\cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right)$

$\frac{5\pi}{3} = 2\pi - \frac{\pi}{3}$

$= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$

$= 2\left(\frac{1}{2} - i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = 1 - i\sqrt{3}$

+ الصيغة الأسية للعدد العقدي $z = x + iy$:

$x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\sin\theta$

$\Rightarrow z = r\cos\theta + i r\sin\theta$

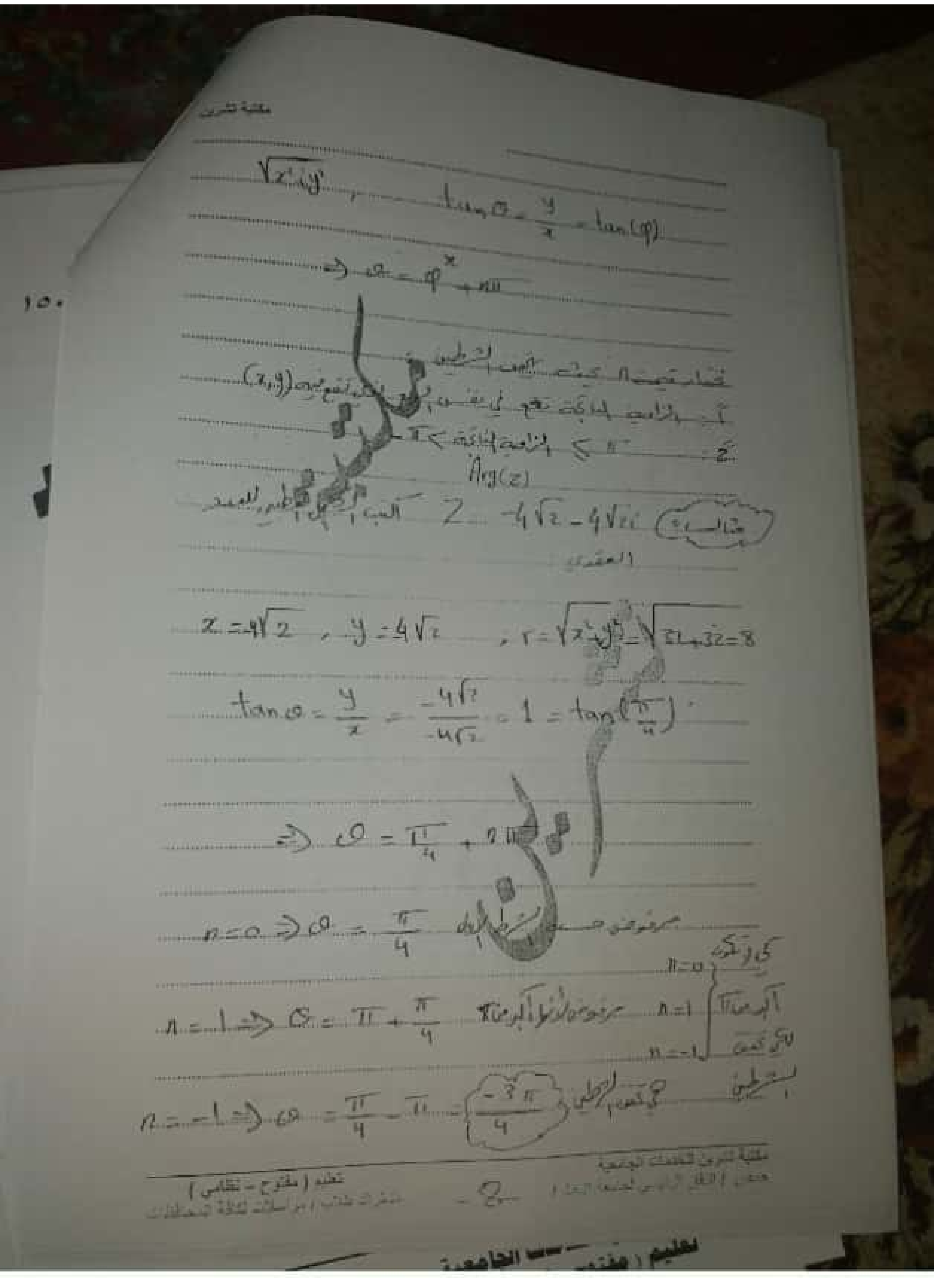
$= r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$= re^{i\theta}$

$|e^{i\theta}| = 1$

دوماً

Scanned by CamScanner



$\sqrt{x^2+y^2}$, $\tan\theta = \frac{y}{x} = \tan(\varphi)$

$\Rightarrow \theta = \varphi + n\pi$

فالسعة θ تحت الفرع الرئيسي أي الزاوية الثابتة تقع في نفس الربع الذي تقع فيه (x,y)

$-\pi <$ الزاوية الثابتة $\leq \pi$

Arg(z)

مثال ٣: $z = -4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}\,i$ أوجد السعة والفرع الرئيسي للعدد العقدي

$x = -4\sqrt{2}$, $y = -4\sqrt{2}$, $r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{32+32} = 8$

$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-4\sqrt{2}}{-4\sqrt{2}} = 1 = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$

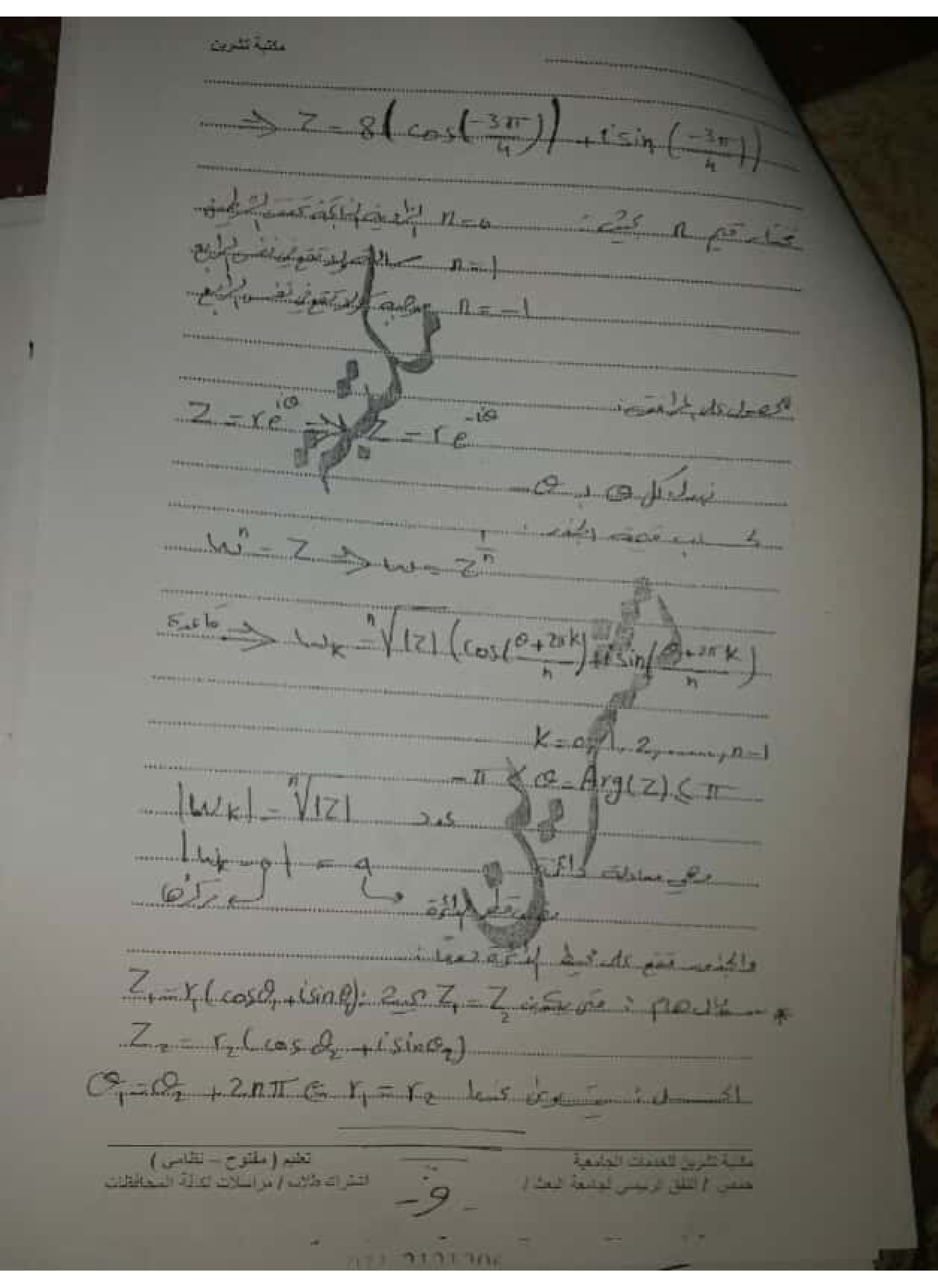
$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} + n\pi$

$n = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$ مرفوض حسب الشرط

نجرب: $n=0$ ، $n=1$ أكبر من π ، $n=-1$ تحقق الشرط

$n = 1 \Rightarrow \theta = \pi + \frac{\pi}{4}$ مرفوض لأنها أكبر من π

$n = -1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} - \pi = \frac{-3\pi}{4}$ تحقق الشرط



$\Rightarrow Z = 8\left(\cos\left(\frac{-3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-3\pi}{4}\right)\right)$

ملاحظة: قيم n كيف: $n = 0$ [illegible]

$n = 1$ [illegible]

$n = -1$ [illegible]

ملاحظة في المثلثي:

$Z = re^{i\theta} \Rightarrow \bar{Z} = re^{-i\theta}$

نبدل كل θ بـ $-\theta$

حساب جذور العدد:

$w^n = Z \Rightarrow w = Z^{\frac{1}{n}}$

قاعدة $\Rightarrow w_k = \sqrt[n]{|Z|}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right)\right)$

$k = 0, 1, 2, \dots, n-1$

$-\pi < \theta = Arg(Z) \leq \pi$

حيث $|w_k| = \sqrt[n]{|Z|}$

وهي معادلة دائرة $|w - 0| = a$ مركزها 0 [illegible]

والجذور تقع على محيط الدائرة

ملاحظة: يكون $Z_1 = Z_2$ حيث: $Z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$

$Z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

الحل: يتساويان إذا كان $r_1 = r_2$ و $\theta_1 = \theta_2 + 2n\pi$